Задание № 11 Числовые ряды с положительными слагаемыми

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

**25.1. Определение бесконечного числового ряда**

**М25.1.1** **Определение.** Пусть дана последовательность . Составленная из элементов этой последовательности другая последовательность  называется *рядом (числовым рядом),* а элементы  называются *частичными суммами* этого ряда. Сам ряд при этом обозначается символом . Элементы последовательности  будем называть *слагаемыми ряда* .

**М25.1.2** **Определение.** Если последовательность частичных сумм  имеет конечный предел, то говорят, что ряд *ряд сходится*. Предел частичных сумм при этом называется *суммой ряда*. Если последовательность  не имеет предела или имеет бесконечный предел, то говорят, что *ряд расходится*.

*Замечание 1.* В отличие от последовательностей, в теории рядов обычно не интересуются конкретным значением суммы ряда (предела последовательности частичных сумм), а интересуются только самим фактом сходимости или расходимости ряда.

**М25.1.5** **Теорема (Критерий Коши сходимости ряда)** Ряд сходится тогда и только тогда, когда для  найдется номер  такой, что для любых  и  выполняется неравенство .

**М25.1.6** **Теорема (Необходимый признак сходимости)** Если ряд  сходится, то .

**М3.1.7** *Замечание 1*. Из равенства  сходимость ряда не следует. Рассмотрим, например, ряд . Его частичная сумма равна .

**М25.1.8** *Замечание 2*. Необходимый признак сходимости может служить для доказательства расходимости рядов, так как из него следует, что если  (в частности, если этот предел вообще не существует), то ряд расходится. Рассмотренный в М25.1.4 ряд расходится, так как не удовлетворяет необходимому признаку сходимости.

**25.2. Остатки ряда**

**М25.2.1 Определение.** Пусть дан ряд . Тогда для любого натурального числа  ряд  называется *остатком ряда* .

**М25.2.2. Теорема (об остатках ряда)** 1) Если ряд сходится, то при любом значении  сходится и его остаток . 2) Если сходится какой-нибудь остаток ряда , то сходится и ряд .

**М25.2.3** *Следствие 1.* Если в ряде изменить любое конечное число слагаемых, то это не повлияет на его сходимость (конечно, если ряд сходился, то его сумма может измениться).

**М25.2.4** *Следствие 2*. Если ряд сходится, то сумма его остатка  стремится к нулю при .

**25. 3 Арифметические операции со сходящимися рядами**

**М25.3.1** Если все слагаемые сходящегося ряда с суммой  умножить на одно и то же число , то ряд  также будет сходящимся и его сумма будет равна .

Действительно, обозначив частичные суммы рядов  и  через  и  соответственно, получим . тогда .

**М25.3.2** **Определение.** *Суммой рядов*  и  называется ряд , *разностью рядов*  и  называется ряд .

**М25.3.3** Если сходятся ряды  и  и их суммы равны соответственно  и , то сходятся и ряды  и  и их суммы равны соответственно  и .

Обозначим через , , ,  частичные суммы рядов , ,  и  соответственно. Тогда ,  и , .

**25.4 Гармонический ряд и обобщенный гармонический ряд**

**М25.1.1.** *Замечание.* Если все слагаемые ряда положительны, то последовательность его частичных сумм возрастает. Если эта последовательность ограничена сверху, то такой ряд сходится. Если не ограничена – сумма ряда равна бесконечности. Таким образом, для рядов с положительными слагаемыми расходимость равносильна бесконечности суммы ряда.

**М25.4.2 Определение.** *Гармоническим ряд*ом называется ряд . *Обобщенным гармоническим рядом* называется ряд  при любом .

**М25.4.3 Теорема (о сходимости обобщенного гармонического ряда)** 1) Гармонический ряд расходится. 2) обобщенный гармонический ряд сходится при  и расходится при .

**М25.4.4 Пример**. Ряд  расходится, а ряд  сходится.

**25.5 Признаки сравнения положительных рядов**

**М25.5.1 Теорема (первый признак сравнения)** Пусть даны ряды  и  с положительными слагаемыми и пусть . Тогда из сходимости ряда  следует сходимость ряда , а из расходимости ряда  следует расходимость ряда .

**М25.5.2 Теорема (предельный признак сравнения)** Пусть даны ряды  и  с положительными слагаемыми и пусть , . Тогда ряды  и  сходятся или расходятся одновременно.

**М25.5.5 Пример.** Проверить сходимость рядов: а) ; б) ; в) ;

*Решение:* а) Поскольку  и ряд  сходится как обобщенный гармонический ряд, то по теореме М3.5.1 сходится и ряд .

б) Поскольку  при  и ряд  расходится, то по теореме М3.5.1 и замечанию М3.5.4 ряд  расходится.

в) Сравним ряд  с рядом  с помощью теоремы М3.5.2. Обозначим , , тогда . Поскольку ряд  расходится, то по теореме М3.5.2 расходится и ряд .

**25.6 Признаки Коши и Даламбера**

**М25.6.1 Теорема (Признак сходимости Коши)** Пусть  - ряд с положительными слагаемыми и . Тогда:

1) Если , то ряд  сходится;

2) Если , то ряд  расходится;

3) Существуют сходящиеся и расходящиеся ряды, для которых .

**М25.6.2 Теорема (Признак Даламбера**) Пусть  - ряд с положительными слагаемыми и . Тогда:

1) Если , то ряд  сходится;

2) Если , то ряд  расходится;

3) Существуют сходящиеся и расходящиеся ряды, для которых .

**М25.6.4 Пример.** Проверить сходимость рядов: а)  (при любом ); б) ; *Решение.* а) Применим признак Коши: .  при любом значении . Значит, по признаку Коши ряд сходится.

б) Применим признак Даламбера: , . Тогда . Ряд сходится.

М25.6.5 Теорема (интегральный признак сходимости Коши) Пусть  - непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция одной действительной переменной. Ряд  сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл .

М3.6.6 Пример: Проверить сходимость ряда 

Решение: Рассмотрим интеграл . Интеграл расходится. Значит, расходится и ряд .

**Самостоятельная работа:**

21.2.2. Применив необходимый признак сходимости, доказать расходимость рядов: а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ; ж) ;

21.3.2. Пользуясь наиболее подходящим из признаков сравнения, проверить сходимость рядов: а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ; ж) ; з) ; и) ; к) ; л) ; м) ;

21.3.3.Пользуясь признаком Даламбера, проверить сходимость рядов: а) ; б) ; в) ; г) ; д) ;

21.3.4. Пользуясь радикальным признаком Коши, проверить сходимость рядов: а) ; б) , ; в) ; г) д) ; е) ;

21.3.5. Пользуясь интегральным признаком Коши, проверить сходимость рядов: а) ; б) ; в) ; г)  ; д)  ;

**Ответы:**

**21.2.2.** а) , ряд расходится; б) , ряд расходится; в) , ряд расходится; г) , ряд расходится; д)  не существует, ряд расходится; е) , ряд расходится; ж) , ряд расходится;

**21.3.2.** а), б), д), е),и),м) – сходятся; в), г), ж), з), к), л) – расходятся;

**21.3.3.** а), в), г), д) – сходятся, б) – расходится;

**21.3.4.** а), б), в), г), д) – сходятся, е) – расходится;

**21.3.5.** а), г), д) – сходятся, б), в) – расходятся;